非線形方程式の精度保証付き数値解法

高安亮紀 (筑波大学)

「精度保証付き数値計算の基礎」チュートリアル

2018年9月10日

http://www.risk.tsukuba.ac.jp/~takitoshi/slides/tutorial_neq.html#/

本発表について

本発表は2016年12月27日に開催された日本応用数理学会三部会連携「応用数理セミナー」での講演（1時間）を縮小・微修正したものです。以下の資料も併せてご参考ください。

- 予稿（http://www.sr3.t.u-tokyo.ac.jp/jsiam/slides/2016/takayasu_web.pdf）
- 講演資料（http://www.risk.tsukuba.ac.jp/~takitoshi/slides/AppMathSeminar2016.html#/）

また、「精度保証付数値計算の基礎」(大石進一編著：2018年7月コロナ社)の第6章に対応します。

本発表の目的

$x \in \mathbb{R}^n$ に対する非線形連立方程式 $f(x) = 0$ の解 x^* を精度保証付き数値計算によって数学的に正しく得るための標準的な手法

- Newton-Kantorovichの定理
- Krawczykの検証法
- （区間Newton法）

を紹介する.

ここで $D \subseteq \mathbb{R}^n$ は f の定義域, $f : D \to \mathbb{R}^n$ は一階連続微分可能な関数($f = (f_1, \ldots, f_n)$)とする.

局所的収束定理（Local Convergence Theorem）

真の解の存在を仮定し, 初期値 x_0 を解の十分近くに選び, Newton法の解近傍での振舞い（局所的2次収束性）を議論する.

$\Longrightarrow$ **真の解の存在を仮定**するため, 存在検証に利用不可

半局所的収束定理（Semi-Local Convergence Theorem）

真の解の存在を仮定せずに, 初期値 x_0 がある条件をみたすとき解の存在と反復の収束を示す.
L. V. Kantorovich (1948): Banach空間 X で証明

Newton-Kantorovichの定理（Affine共変版）

D_0をDの開凸部分集合とする.

- $f : D \subseteq X \to X$がD_0において微分可能な写像
- $x_0 \in D_0$においてfのFrechét微分$f'[x_0]$が正則

x_0を初期値とするX上のNewton法を考え, 次を仮定する.

1. $f'[x]$に対し, D_0上で
   $\|f'[x_0]^{-1}(f'[x] - f'[y])\| \leq \omega\|x - y\|, \ \forall x, y \in D_0$
   をみたす定数$\omega > 0$が存在する.
2. x_0において
   $$\left\|f'[x_0]^{-1} f(x_0)\right\| \leq \alpha$$
   をみたす$\alpha > 0$が存在し, $\alpha\omega \leq \frac{1}{2}$となる.

このとき

$$\rho^* = \frac{1-\sqrt{1-2\alpha\omega}}{\omega},\ \rho^{**} = \frac{1+\sqrt{1-2\alpha\omega}}{\omega}$$

とする.

3. x_1 をNewton法の反復1回で得られた近似解とし, x_1 を中心とする半径 $\rho^* - \alpha$ の閉球:

$$\overline{U}\left(x_1, \rho^* - \alpha\right) := \{x \in X : \|x - x_1\| \leq \rho^* - \alpha\}$$

が D_0 に含まれる. すなわち $\overline{U}\left(x_1, \rho^* - \alpha\right) \subseteq D_0$ が成立する.